



Departamento de Física
Universidade Federal de Pernambuco

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2016

Mecânica Quântica

11/08/2016 – 09h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões.)

Questão 1: Conceitos Fundamentais

- (a) (25%) Uma partícula de massa m está confinada em um poço infinito unidimensional entre $x = -L/2$ e $x = +L/2$. Determine os autovalores de energia e as correspondentes autofunções, devidamente normalizadas.

$$\text{Dados:} \quad \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}; \quad \int \sin^2 \theta d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4}.$$

- (b) (25%) Suponha que no instante $t = 0$ a partícula tenha 25% de chance de ser encontrada no estado fundamental e 75% de chance de ser encontrada no primeiro estado excitado. Em $t = 0$, qual é a probabilidade de que a partícula seja encontrada no lado *direito* do poço?

$$\text{Dado:} \quad \int_0^{\pi/2} \cos(m\theta) \sin(n\theta) d\theta = \frac{n}{n^2 - m^2}, \quad \text{para } m \text{ e } n \text{ inteiros e } m + n \text{ ímpar.}$$

- (c) (25%) Partindo do estado inicial descrito em (b), qual é a função de onda da partícula no instante t posterior?
- (d) (25%) Suponha agora que cinco partículas idênticas, cada uma com massa m , não interagentes, estejam confinadas neste mesmo poço. Qual seria a energia total do sistema em seu estado fundamental se as partículas fossem (i) bósons e (ii) férmions de $spin \frac{1}{2}$?

Questão 2: Momento Angular

Um sistema de três partículas não idênticas, todas com *spin* $\frac{1}{2}$, é descrito pelo hamiltoniano

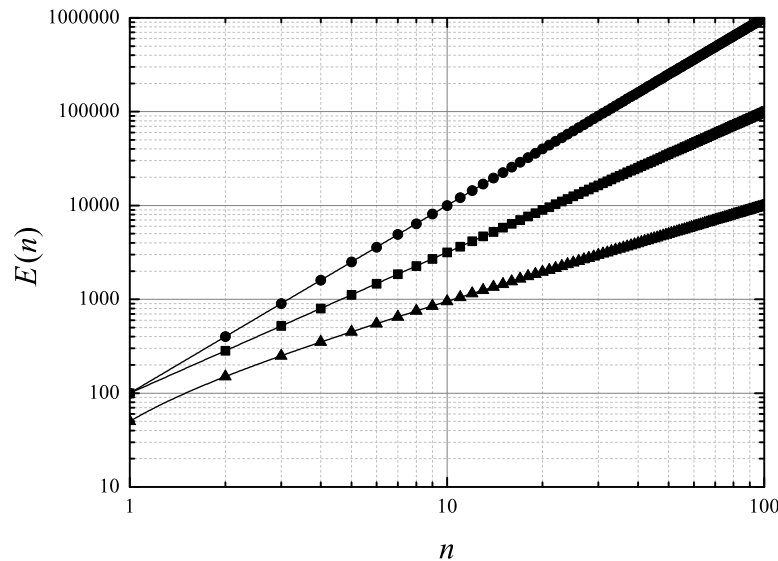
$$H = a\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + b\left(\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right) \cdot \vec{S}_3,$$

onde a e b são constantes reais não negativas e \vec{S}_k é o *spin* da k -ésima partícula ($k = 1, 2, 3$).

- (a) (50%) Encontre os autovalores de energia e respectivas degenerescências se $a > 0$ e $b = 0$.
- (b) (50%) Encontre os autovalores de energia e respectivas degenerescências se $a > 0$ e $b > 0$.

Questão 3: Métodos Aproximativos

Os símbolos na figura abaixo mostram o comportamento dos níveis de energia $E(n)$ de uma partícula de massa m em três potenciais confinantes unidimensionais, em função do ordinal n que identifica o nível. Aqui, $n = 1$ corresponde ao estado fundamental, $n = 2$ ao primeiro estado excitado e assim por diante. Note que as escalas são logarítmicas. As linhas são guias para os olhos.



- (a) (25%) Dois desses potenciais são bem conhecidos. Identifique-os, justificando sua resposta.
- (b) (25%) Para o potencial desconhecido, suponha que $E(n) \sim n^\alpha$. A partir do gráfico acima, determine o valor de α .
- (c) (50%) Para o potencial desconhecido, considere como modelo um monômio de grau k com constante de acoplamento a , ou seja, $V(x) = ax^k$. Na aproximação semi-clássica de Bohr-Sommerfeld, a ação

$$I = I(m, a, E) \sim \int p dx \sim nh \sim m^\beta a^\gamma E^\delta.$$

Use o resultado de (b) e análise dimensional para encontrar os valores numéricos de β , γ e δ .

Questão 4: Teoria de Perturbação

Sejam h a constante de Planck, e a carga do próton, m_e a massa do elétron e ϵ_0 a permissividade elétrica do vácuo. Considere o sistema de unidades em que $h/(2\pi) = e = m_e = 1/(4\pi\epsilon_0) = 1$. Nele, as energias não perturbadas do átomo de hidrogênio são dadas por $E(n) = -1/(2n^2)$.

- (a) (15%) Considere um átomo de hidrogênio sujeito a um campo elétrico homogêneo de magnitude F constante, dirigido ao longo do eixo z . Escreva o hamiltoniano perturbativo H_1 devido a esse campo na representação de coordenadas.
- (b) (15%) Seja V a energia coulombiana do hamiltoniano não perturbado. Esboce, em um único sistema de eixos ortogonais, os gráficos de $V(z)$, de $H_1(z)$ e da soma $V(z) + H_1(z)$, onde $-\infty < z < \infty$. A partir desses gráficos, sem usar equações, descreva como a inclusão do campo externo F leva a um tempo de vida finito T para os estados atômicos. Discuta o comportamento de T com o aumento de F .
- (c) (15%) *Escreva*, sem calcular, a equação que fornece a correção à energia do estado fundamental do átomo na presença do campo até segunda ordem em teoria de perturbação, ou seja, na forma $\Delta E = \Delta E(1) + \Delta E(2)$.
- (d) (15%) *Calcule* $\Delta E(1)$ definido em (c).
- (e) (40%) No sistema de coordenadas descrito acima, $\langle r^2 \rangle = 3$ e $\langle z^2 \rangle = 3$. Use este resultado para estimar um limite inferior para $\Delta E(2)$ definido em (c).